**Metodo 2: Applicazione del metodo a variabili separabili.**

Il metodo si applica quando il secondo membro del problema di Cauchy si presenta nella forma prodotto $f(x)g(y)$. Il problema di Cauchy diventa così:

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

In questo caso il procedimento consiste proprio nel *separare le variabili*, nell'ipotesi che $g(y_0) \neq 0$.

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x),$$

integrando primo e secondo membro

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

cambiando la variabile d'integrazione:

$$y(t) = s \quad , \quad y'(t)dt = ds$$

si ottiene:

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Chiamiamo

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} - \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

. Per il teorema di Dini la soluzione è implicitamente definita da queste condizioni:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

**Esercizio.**

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Il dominio A della funzione $f(x,y)$ è

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}.$$

$$\begin{cases} yy' = x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^x y'(t)y(t)dt = \int_1^x tdt$$

$$y(t) = s \quad , \quad y'(t)dt = ds$$

otteniamo:

$$\int_1^y sds = \int_1^x tdt.$$

Calcolando gli integrali abbiamo:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Dato che

$$y(1) = 1$$

la nostra soluzione è $y = x$ definita in $I = (0, +\infty)$
$I = (0, +\infty)$ è l'intervallo più grande in cui la mia soluzione è definita.

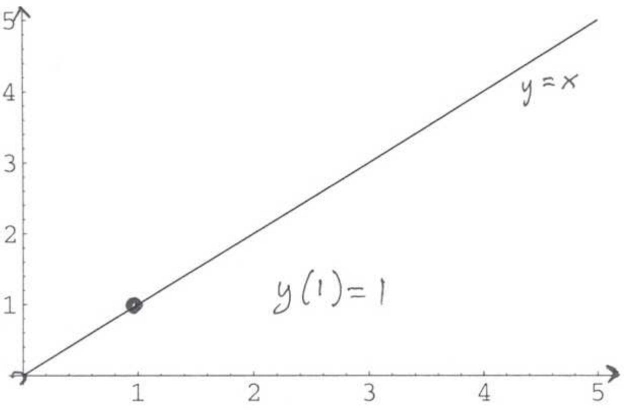


Figura 1: Grafico della soluzione del problema di Cauchy

Anche se il secondo membro del problema di Cauchy non si presenta nella forma delle variabili separabili, in alcuni casi, se $f(x, y)$ è particolare, ci si può riportare a tale forma.
Per una trattazione più ampia si rimanda al testo di esrcizi : Favini Lanconelli Obrecht Parenti *Equazioni differenziali.* Qui consideriamo solo un esempio:

**Esempio di equazioni la cui soluzione si riporta al metodo delle variabili separabili.**

Sia

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $f(x, y)$ è un'*equazione omogenea di grado zero*, ovvero

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$$

Il metodo consiste nel porre

$$\begin{aligned} y(x) &= xv(x) \\ y'(x) &= v(x) + xv'(x) \\ f(x, v(x)) &= f(1, v(x)) \end{aligned}$$

Allora:

$$v + xv' = f(1, v)$$

$$xv' = f(1, v) - v \Rightarrow \frac{v'}{f(1, v) - v} = \frac{1}{x}$$

**Esercizio.**

$$\begin{cases} y' = \frac{x-y}{x+y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Il dominio della funzione f(x, y) è $A = \{(x, y) : x > -y\}$.

Osserviamo che $f(x, y)$ è omogenea di grado zero:

$$f(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{x - y}{x + y}$$

Ora sostituendo a $y$ l'espressione $xv(x)$, e a $y'$ l'espressione $v(x) + xv'(x)$, si ottiene:

$$\begin{cases} v + xv' = \frac{x-xv}{x+xv} \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

Dunque

$$xv' = \frac{1 - v}{1 + v} - v = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v}.$$

Ora applico il metodo della separazione delle variabili:

$$\begin{cases} v' \left(\frac{1+v}{1-2v-v^2}\right) = \frac{1}{x} \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

Cambiamento di variabile:

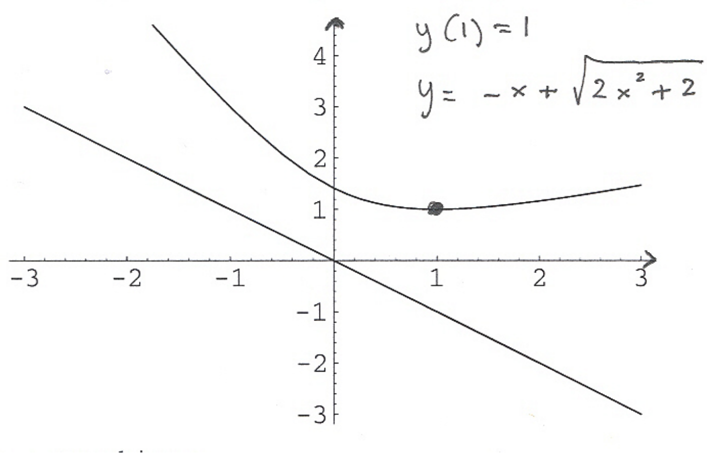


Figura 2: Grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$v(t) = s \quad , \quad v'(t)dt = ds$$

e sostituendo nell'integrale:

$$\int_1^v \frac{1+s}{1-2s-s^2}ds = \int_1^x \frac{1}{t}dt \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}log|1-2s-s^2|\right]_v^1 = [log|t|]_x^1$$

Alla fine otteniamo due soluzioni:

$$v_1 = -1 + \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}$$
$$v_2 = -1 - \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}$$

Sostituendo $v_1(x)$ e $v_2(x)$ a $y(x) = xv(x)$ :

$$y_1(x) = -x + \sqrt{2x^2 + 2}$$
$$y_2(x) = -x - \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Imponendo la condizione iniziale $v(1) = 1$ l'unica soluzione accettabile è la prima (vedi figura 2).