Metodo 1 : Applicazione del metodo delle approssimazioni successive.

Ricordiamo che cercare una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

equivale a cercare una soluzione dell'equazione integrale :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Il metodo consiste nel costruire $y_n(t)$ per $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, in questo modo :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \\ &\vdots \\ y_n(t) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \\ &\vdots \end{aligned}$$

La soluzione è data da :

$$y(t) = lim_{n\to\infty}(y_n(t)).$$

Esercizio:

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La funzione

$$f(t, y) = ty$$

è definita ed è C^∞ su tutto R^2.
Applichiamo il metodo delle approssimazioni successive:

$$y_0 = 1$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^x (t1)dt = 1 + \int_0^x tdt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^x t(1 + \frac{t^2}{2})dt =$$

$$= 1 + \int_0^x (t + \frac{t^3}{2})dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^x t(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8})dt =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{2} + \frac{1}{2}(\frac{t^5}{4})\right) dt =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{x^6}{6}$$

Notiamo che questi termini sono i primi termini dello sviluppo di Taylor della funzione $exp(\frac{x^2}{2})$, per cui iterando il procedimento possiamo dedurre che la soluzione è :

$$y(x) = \exp(\frac{x^2}{2})$$

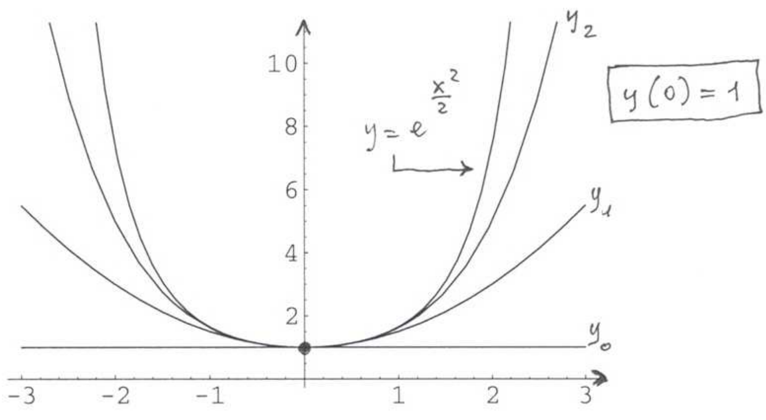

Figura 1: Grafico della soluzione del problema di Cauchy

Osservazione

Il metodo delle approssimazioni successive è costruttivo. Nell'esercizio precedente la forma di y_n è particolarmente semplice, per cui è facile capire a quale funzione, applicando il metodo, $y_n(x)$ converge.