Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Ricordiamo che l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea, del tipo

$$y' = a(x)y$$

è:

$$Ce^{\int_\alpha^x a(t)dt}, C \in R.$$

Mentre per un'equazione non omogenea, del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)$$

è :

$$e^{\int_\alpha^x a(t)dt}[C + \int_\beta^x b(t)e^{-\int_\alpha^t a(s)ds}dt],$$

$$C \in R$$

$$\alpha, \beta \quad \text{scelti in modo opportuno.}$$

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine, *non* omogenea

$y' - 2y = 1.$

Risolviamo applicando la formula;

$$a(t) = 2$$

$$b(t) = 1$$

. Il dominio della funzione $f(x, y) = 2y + 1$ è tutto R^2 per cui si può scegliere
$\alpha = \beta = 0.$

Calcoliamo ora l'integrale

$$y(x) = e^{\int_0^x 2dt}[C + \int_0^x 1e^{-\int_0^t 2ds}dt] = e^2x[C - \frac{e^{-2x}}{2}]$$

Quindi $y(x) = Ce^{2x} - 1/2.$

Ricordiamo che lo spazio delle soluzioni di una equazione lineare

del I ordine omogenea, è uno spazio vettoriale di dimensione 1.(vedi Lanconelli *Lezioni di Analisi Matematica II-Prima parte*)
Ricordiamo inoltre che per avere la soluzione generale di un'equazione non omogenea, basta sommare alla soluzione generale della omogenea, *una* soluzione particolare della non omogenea. In casi semplici la ricerca della soluzione particolare viene fatta per *tentativi.*
Procediamo dunque cercando prima la soluzione generale dell'omogenea associa
ta e poi cercando una soluzione particolare della non omogenea:

$y' - 2y = 0$ è l'equazione omogenea associata.

Ricordiamo che cercando la soluzione sotto la forma

$$y = e^{\lambda x}$$

si ottiene

$$y' = \lambda e^{\lambda x}.$$

Quindi

$$\lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0.$$

$\lambda - 2 = 0 \quad$ (Equazione caratteristica) $\Rightarrow \lambda = 2$.
Sostituisco λ e otteniamo l'integrale generale:

$$y(x) = Ce^{2x}$$

Ora cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea, che in questo caso, dato che $b(x) = 1$, può essere ricercata sotto la forma:

$$y = A = \text{costante}$$

allora

$$y' = 0.$$

Sostituiamo all'equazione di partenza e troviamo il valore di A che

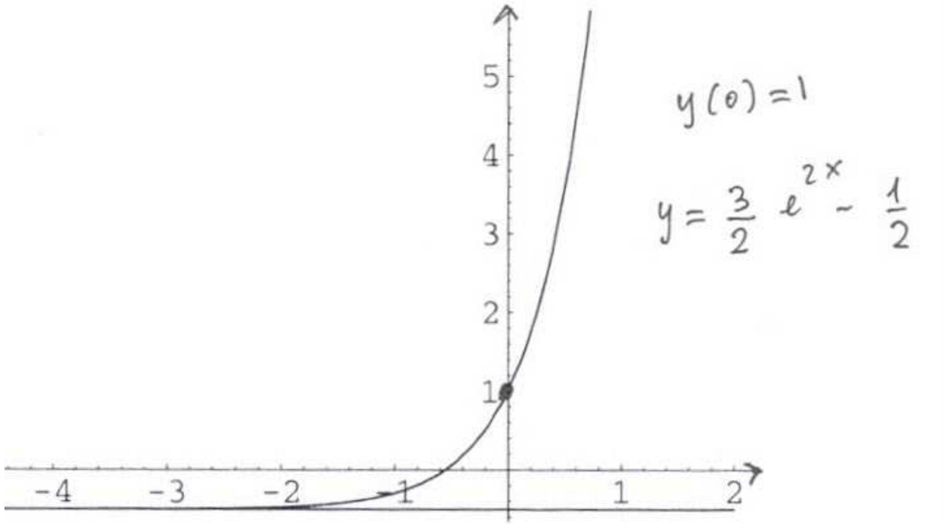

Figura 1: Grafico della soluzione del problema di Cauchy

è 1/2. Quindi la soluzione finale è

$$y(x) = Ce^{2x} - 1/2.$$

Nota.
Se avessimo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 1$; otteniamo $y(0) = C - 1/2 = 1$
$\Rightarrow C = 3/2$.
In questo caso la soluzione finale è:

$$y(x) = 3/2e^{2x} - 1/2$$

Esercizio 2.

$y' - 2y = x^2 + x$

$a(x) = 2$, $b(x) = x^2 + x$.

$y(x) = e^{\int_0^x 2tdt}[C + \int_0^x (t^2 + t)e^{-\int_0^t 2ds}dt].$

Risolvendo l'integrale troviamo la soluzione

$$y(x) = Ce^{2x} - x^2/2 - x - 1/2.$$

Applichiamo l'altro metodo, cioè cominciamo col cercare una soluzione generale dell'omogenea associata:

$$y(x) = Ce^{2x}.$$

Come prima, a questo punto, dato che $b(x) = x^2 + x$, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea sotto la forma:

$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$

$\bar{y}' = 2Ax + B.$

Sostituiamo $\bar{y}$ e $\bar{y}'$ all'equazione di partenza:

$(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad x^2(-2A) + x(2A - 2B) + (B - 2C) = x^2 + x.$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - 2B = 1 \\ B - 2C = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema e troviamo i rispettivi valori di A, B, C.

$$\begin{cases} A = -1/2 \\ B = -1 \\ C = -1/2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori di A, B e C a $\bar{y}$ otteniamo la soluzione generale della nostra equazione:

$$y(x) = Ce^{2x} + (-\frac{1}{2}x^2 - x - 1/2).$$