Equazioni differenziali lineari di ordine superiore al primo, a coefficienti costanti.

Esercizio 1. Determinare la soluzione generale:

Consideriamo un'equazione del II ordine omogenea:

$y'' - y = 0.$

L'equazione caratteristica è:

$\lambda^2 - 1 = 0.$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$,due soluzioni reali distinte , e

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

perchè lo spazio delle soluzioni di un'equazione lineare del secondo ordine omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione 2, e le soluzioni e^x e e^{-x} sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2.

$y'' + y = 0.$
Allora $\lambda = \pm i$,due soluzioni complesse coniugate della forma $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$.
Attraverso le formule di Eulero possiamo scrivere la nostra soluzione in un'altra forma:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} sin\beta x$$

.
In questo caso $\alpha = 0$, $\beta = 1$ per cui la soluzione generale è:

$$y(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$$

Esercizio 3.

$y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda_1 = 1 = \lambda_2$, due soluzioni reali coincidenti.

Allora le due soluzioni indipendenti sono, in questo caso, e^x e xe^x.

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Esercizio 4.

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, tre soluzioni reali distinte.
Allora

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

Esercizio 5.

$y''' + y = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, una soluzione reale e due complesse coniugate.
Attraverso le formule di Eulero possiamo scrivere la nostra soluzione generale in questa forma

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3 e^{\frac{1}{2}x} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Esercizio 6.

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, tre soluzioni reali coincidenti.
La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$