Esempi di equazioni lineari non omogenee.

La soluzione particolare di un' equazione differenziale lineare non omogenea, in alcuni casi, può essere determinata facilmente.
Sia

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea di ordine n e sia:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^(n-1) + \cdots + a_n = 0$$

la sua equazione caratteristica.

1. Se $f(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$, dove $p_n(x)$ è un polinomio in x di grado n, e $\varphi(\alpha) \neq 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione è del tipo:

   $$e^{\alpha x} q_n(x),$$

   con $q_n(x)$ polinomio di grado n in x.

   Se, invece, $\varphi(\alpha) = 0$ e α ha molteplicità s, allora una soluzione particolare dell' equazione è del tipo:

   $$x^s e^{\alpha x} q_n(x).$$

2. Se

   $$f(x) = e^{\alpha x}[p_n(x) cos\beta x + r_m(x) sin\beta x]$$

   dove $p_n(x)$ e $r_m(x)$ sono polinomi di grado n e m, rispettivamente, e $\varphi(\alpha \pm i\beta) \neq 0$, allora una soluzione particolare dell' equazione è del tipo:

   $$e^{\alpha x}[q_s(x) cos\beta x + t_s(x) sin\beta x],$$

   dove $s = max(m, n)$.

   Nel caso che $\varphi(\alpha \pm i\beta) = 0$ ed i è la molteplicità di $\alpha \pm i\beta$, allora una soluzione particolare dell' equazione è del tipo:

   $$x^i e^{\alpha x}[q_s(x) cos\beta x + t_s(x) sin\beta x].$$

Equazioni differenziali lineari di ordine superiore al primo, a coefficienti costanti.

Esempi di equazioni non omogenee del II ordine

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale:
$y'' - y = x$

Per quanto detto sopra, una soluzione particolare della non omogenea è del tipo

$$\bar{y} = Ax + B$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - x$$

Esercizio 2.

$y'' + y = x$

Come prima cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea sotto la forma

$$\bar{y} = Ax + B$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 cosx + C_2 sinx + x$$

Cambiamo il termine noto, prendendo per esempio un polinomio trigonometrico:

$y'' + y = cosx$

Una soluzione particolare della non omogenea la cerchiamo sotto la forma

$$\bar{y} = (Acosx + Bsinx)x$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 cosx + C_2 sinx + \frac{1}{2} xsinx$$

Esercizio 3.
$y'' - 2y' + y = x$

La soluzione particolare della non omogenea va sempre cercata sotto la forma

$$\bar{y} = Ax + B$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x + x + 2$$

Esempi di equazioni non omogenee del III ordine.

Esercizio 4.
$y''' - 3y'' + 2y' = e^x$

In questo caso una soluzione partcolare della non omogenea è del tipo

$$\bar{y} = Axe^x$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} - xe^x$$

Esercizio 5.

$y''' + y = e^x$

La soluzione particolare della non omogenea è della forma

$$\bar{y} = Ae^x$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x cos \frac{\sqrt{3}}{2}x} + C_3 e^{\frac{1}{2}x sin \frac{\sqrt{3}}{2}x} + \frac{1}{2}e^x$$

Esercizio 6.

$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$

La soluzione particolare della non omogenea è della forma

$$\bar{y} = Ax^3 e^x$$

La soluzione generale è :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x$$